

Hasta el infinito... ¿Y más allá?



Taller de Talento Matemático de Navarra

Pamplona, 17 de enero 2025

Durante esta sesión nos acercaremos a, jugaremos con, e intentaremos comprender uno de los conceptos matemáticos más abstractos y poco intuitivos que ha creado (o no) la mente humana: el **INFINITO**. Pero antes de empezar, toca responder la pregunta más complicada que veremos hoy.

1. ¿Qué es el infinito?

Como os podéis imaginar, no hay una única respuesta correcta a la anterior pregunta. En matemáticas, todas las teorías empiezan con unas definiciones y unos axiomas (que son teoremas o reglas que suponemos ciertos); y a partir de ahí se demuestran otros teoremas hasta llegar a obtener unos cuantos resultados útiles o interesantes. Así que lo primero de todo es definir bien los conceptos que vamos a utilizar en nuestra teoría.

Según el diccionario de la RAE existen siete acepciones para la palabra “infinito”, de las cuales nos interesan tres:

1. (adj.) Que no tiene ni puede tener fin ni término.
2. (m.) Valor mayor que cualquier cantidad asignada.
3. (m.) Signo (∞) con el que se expresa el infinito.

Uno de los conceptos asociados al infinito es el conjunto de los números naturales, de donde obtenemos lo que podríamos calificar como el infinito más simple: hay infinitos naturales, lo que quiere decir que podemos contar números naturales sin acabar nunca. Pero...

2. ¿Qué significa contar?

Cuando contamos los elementos de un conjunto lo que hacemos realmente es asignar un número natural a cada uno de ellos (en matemáticas esto se denomina crear una biyección) y quedarnos con el último, que nos dice el cardinal (número de elementos) del conjunto. Pero si un conjunto es demasiado grande, no es fácil contar cuántos elementos tiene. Fijaos en la sala en la que estamos, o imaginaos un concierto en un estadio. Es complicado saber cuántas personas han asistido, pero sí podemos saber fácilmente si el estadio está lleno o no.

3. ¿Cómo sabemos si el estadio está lleno?

Lo mismo ocurre cuando el número de elementos de un conjunto es infinito. Si podemos encontrar una biyección entre cada elemento y los números naturales, diremos que el conjunto es numerable (se pueden ordenar sus elementos en una lista). Veamos ahora algunos ejemplos de conjuntos numerables con un experimento mental muy famoso de un matemático alemán del siglo XIX, David Hilbert.

EL HOTEL DE HILBERT

Supongamos que somos los dueños de un hotel con infinitas habitaciones numeradas 1, 2, 3, 4 ... (claramente esto es imposible en el mundo físico, pero lo bueno de las matemáticas es que podemos imaginarlo y ver si funciona), y justamente hoy están todas ocupadas por infinitas personas, una en cada habitación. De repente llega un nuevo cliente.

4. ¿Podemos darle una habitación libre? ¿Cómo?

5. ¿Y si llegan 100 clientes? ¿Y si llegan infinitos?

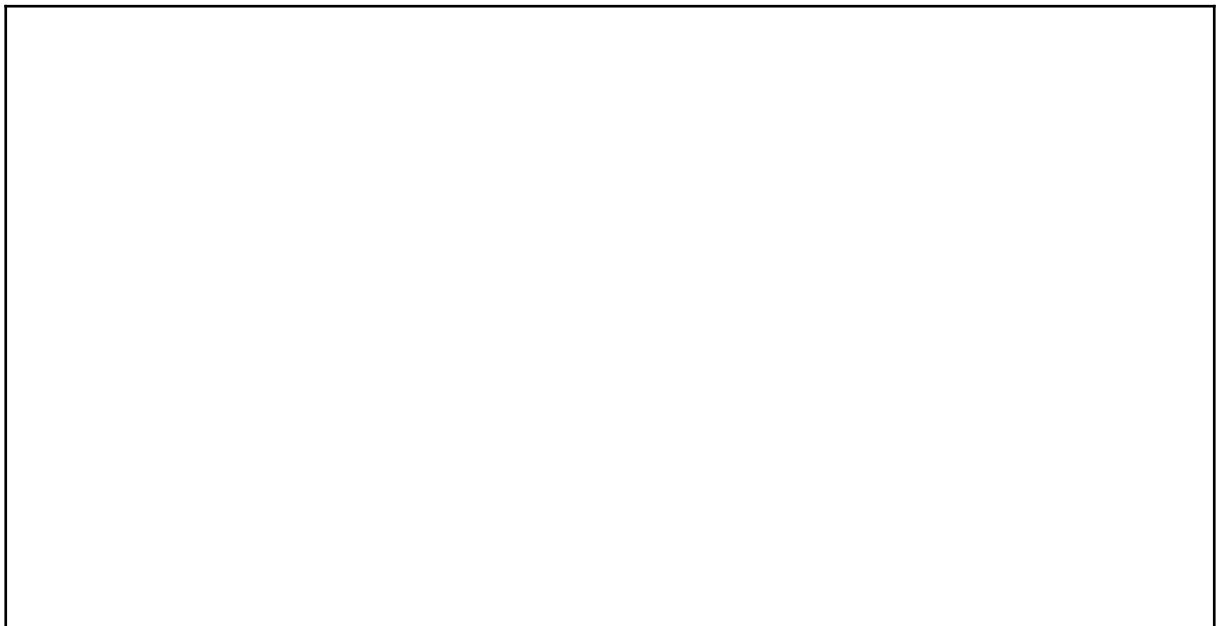
Estos resultados chocan contra nuestra intuición, ¿cómo puede ser que un conjunto sea igual de grande que una parte del mismo? Ya os he avisado al principio, el infinito no es un concepto sencillo de asimilar. Hemos visto de esta forma que existen tantos números pares como naturales, o incluso enteros. Pero pasemos a otro conjunto distinto de los naturales: los números racionales.

6. ¿Podemos enumerar los números racionales?

LOS TRANSFINITOS DE CANTOR

Pero entonces, ¿todos los infinitos son iguales? ¿Qué ocurre con los infinitos números reales? Esta pregunta se la hizo por primera vez otro matemático alemán del siglo XIX llamado Georg Cantor, y su respuesta causó estupor en la comunidad matemática del momento. Mediante un ingenioso método, Cantor demostró que **NO** se puede realizar una biyección entre los naturales y los reales, y por tanto, que el infinito de los números reales es **MAYOR** que el de los naturales.

7. Método de la diagonal de Cantor



El trabajo de Cantor está reconocido hoy en día como cierto y muy original, pero en su época recibió muchas críticas que le causaron graves episodios de depresión. Entre muchas otras cosas demostró, no solo que hay infinitos mayores que otros, sino que hay infinitos infinitos (no es una errata) y que siempre se puede encontrar uno más grande, aunque sean ya inconcebibles para la mente humana. Para ayudar a comprenderlo, creó los números transfinitos: $\aleph_0$ (se pronuncia “aleph zero” o “alef cero”) representa el infinito de los números naturales, el siguiente infinito sería $\aleph_1$ (“aleph uno”), y así sucesivamente.

Una de las cuestiones que no supo responder fue la siguiente: ¿es $\aleph_1$ el infinito de los reales o existe otro infinito distinto comprendido entre los naturales y los reales? Hoy en día sabemos que esta pregunta, conocida como “La hipótesis del continuo” no tiene una respuesta definida, sino que depende de los axiomas que escojamos. Dicho de otra forma, ¡la respuesta puede ser tanto Sí como No! Los resultados matemáticos son a veces muy sorprendentes (y extraños).

DE LO INFINITAMENTE GRANDE A LO INFINITAMENTE PEQUEÑO

Pasemos a otro tema un poco distinto. Hemos hablado de los infinitos grandes, pero también existen los infinitos pequeños. Quizás hayáis visto alguna vez esta duda: ¿es $4'999999999...$ (infinitos nueves) lo mismo que 5? O más importante aún, ¿es un suspenso o un aprobado? Simplifiquemos un poco:

8. ¿Es $0'999999... = 1$?

Podemos pensar el resultado anterior como coger infinitos números de la forma $0'9$, $0'99$, $0'999...$ (cada uno con un decimal más que el anterior), y ver que la diferencia entre 1 y estos números se hace cada vez más pequeña. Por lo tanto, si pudiéramos coger el último de tales números, la diferencia sería 0 y el número sería exactamente igual a 1.

Esto que acabamos de ver es un concepto llamado **límite** de una sucesión (o función), que es la base de lo que se conoce como el cálculo infinitesimal. No os preocupéis si no os suenan de nada todos estos términos, la mayoría de ellos los veréis en cursos posteriores; preguntad a vuestros familiares mayores por las derivadas o integrales (aquí se oye de fondo una risa malvada de profesor de mates).

Pero quiero que os quede clara una cosa. Toda nuestra sociedad tal y como la conocemos (al menos tecnológica y científicamente hablando) se ha desarrollado a partir de esta pequeña idea de aproximarnos tanto como queramos a un número en infinitos pasos. Pensad a partir de ahora que todos llevamos un trocito del infinito en nuestros bolsillos.

Volviendo al principio de la sesión, la respuesta más acertada a la pregunta “¿Qué es el infinito?” debería ser otra pregunta “¿Cuál de todos ellos?”. Espero que hayáis disfrutado y aprendido algo en esta sesión, y que os atreváis a buscar más curiosidades sobre este tema tan fascinante.

**Nos vemos en la próxima sesión, y recordad:
¡Hasta el infinito y MUCHO más allá!**



BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS INTERESANTES

LIBROS

- *Un descubrimiento sin fin* - Enrique Gracián
- *La verdad está en el límite* - Antonio J. Durán
- *Satán, Cantor y el infinito* - Raymond Smullyan

YOUTUBE

- [*¿De qué está hecho un número?*](#) - Quantum Fracture y Mates Mike
- [*El trágico final del hotel infinito*](#) - Quantum Fracture
- [*¿Cómo de grande es el infinito?*](#) - Mates Mike
- [*¿Existen infinitos más grandes que otros?*](#) - Derivando